

Álgebra Geométrica Conforme para construir diagramas de Voronoi

Netz Romero, Ricardo Barrón Fernández

Centro de Investigación en Computación del Instituto Politécnico Nacional, México
jromero_al3@sagitario.cic.ipn.mx, rbarron@cic.ipn.mx

Resumen. Para dividir un espacio de acuerdo a las regiones de Voronoi, se han utilizado diversas técnicas, desde los métodos incrementales, divide y vencerás, de barrido entre los más importantes. En este trabajo se plantean los conceptos básicos del Álgebra Geométrica Conforme como herramienta matemática, para aplicarlos a una metodología propuesta donde definimos el concepto de “esfera hueca” y así construir los diagramas de Voronoi en forma incremental. La estructura de esferas huecas será la encargada de construir el diagrama y se relacionará con el empleo de los objetos geométricos que nos proporciona el Álgebra Geométrica Conforme. Dicha herramienta matemática nos muestra diversas ventajas frente al espacio euclidiano y dan una excelente solución al cómputo gráfico.

Palabras clave: Diagrama de Voronoi, Álgebra Geométrica Conforme, esfera hueca, objetos geométricos.

Abstract. A way to divide a space according to Voronoi regions, different techniques have been used since the incremental methods, divide and conquer, sweep line among the most important. In this paper we use the basic concepts of Conformal Geometric Algebra as mathematical tool, to apply a proposed methodology where we define a new concept called “hollow sphere” and build Voronoi diagrams incrementally. The structure of hollow spheres will be responsible for building the diagram and relate to the employment of the geometric objects that provides the Conformal Geometric Algebra. Such mathematical tool shows several advantages over the Euclidean space and provide an excellent solution to the graphic computer.

Keywords: Voronoi diagram, Conformal Geometric Algebra, hollow spheres, geometric objects.

1 Introducción

Los diagramas de Voronoi son las estructuras que nombra así el matemático Georgy Voronoi en 1908. Desde finales del siglo XIX los diagramas de Voronoi han realizado significativa influencia en aplicaciones como áreas de matemáticas, físicas, geología, meteorología, ecología, anatomía, astronomía por mencionar las principales áreas de interés. En las últimas décadas, gracias a los aportes de los avances en tecnología se

han desarrollado nuevas áreas de investigación en los que han realizado aplicaciones de los diagramas de Voronoi [1]. Antes de que se establecieran los conceptos matemáticos de los diagramas de Voronoi, en 1844 Hermann Grassmann publica su obra “Teorema de la Extensión” donde expresa su visión matemática para la geometría, pero su trabajo no fue reconocido como debería ser en su tiempo. William K. Clifford combinó las ideas del producto exterior de Grassmann y los cuaterniones de Hamilton. Aun así sus contemporáneos no supieron utilizar de manera adecuada las herramientas propuestas por Clifford y utilizaron el álgebra vectorial de Josiah W. Gibbs y Oliver Heaviside. Sin embargo no fue hasta los años de 1960 cuando David Hestenes [2] quien buscaba mejores herramientas matemáticas para las ciencias físicas (mecánica cuántica y relatividad) fue quien reconoció la importancia del álgebra geométrica. A partir de ahí se generaron trabajos de investigación en diversas áreas como las matemáticas, la física, aplicaciones para la ingeniería y las ciencias computacionales [3].

En este trabajo se plantearán los principios y conceptos para poder construir el diagrama de Voronoi implementando el uso del Álgebra Geométrica Conforme (AGC). El AGC se visualiza como una alternativa del espacio euclidiano para dar solución a problemas de computación gráfica, y por sus propiedades nos permite manejar intuitivamente objetos geométricos y operaciones entre ellos. Para aprovechar esta herramienta, presentaremos también en este trabajo una novedosa técnica para construir las regiones de Voronoi, donde se utiliza una esfera como estructura principal para su construcción. De esta manera se asocia el cuerpo geométrico de una esfera a la representación de una esfera en el AGC como una de sus primitivas figuras básicas.

2 Diagramas de Voronoi utilizando el concepto de esfera hueca

2.1 Diagramas de Voronoi

El diagrama de Voronoi consiste en dividir el espacio en regiones, donde cada región está relacionada a un sitio de un conjunto finito de ellos, de tal manera que cada región del espacio está constituida por los puntos más cercanos a él que a cualquier otro. El diagrama de Voronoi en un espacio de dos dimensiones está formado por aristas, vértices y regiones. Una arista está representada como un bisector perpendicular de dos sitios más cercanos, con la condición de que la arista pase por el centro de un círculo si éste contiene a dos sitios cercanos. Un vértice puede ser representado como el centro de un círculo definido por tres sitios. Y las regiones acotadas del diagrama tienen forma de polígonos convexos. Ver la figura 1 para comprender las propiedades del diagrama de Voronoi.

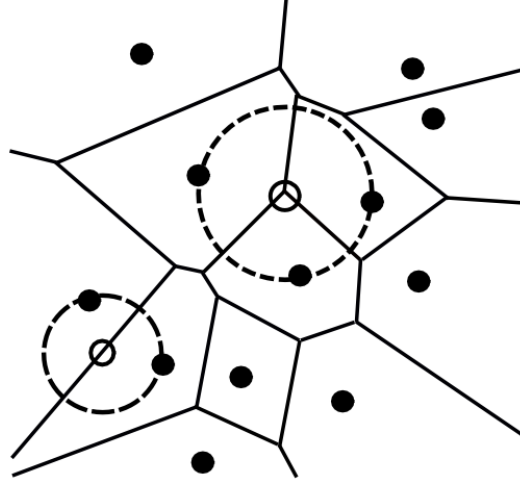


Fig. 1. Diagrama de Voronoi en dos dimensiones.

Tomaremos la siguiente notación para definir el diagrama de Voronoi de primer orden. La distancia euclidiana entre dos puntos p y q se denota como $dist(p, q)$. Sea $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ un conjunto N de sitios distintos en un espacio, definiremos la región de Voronoi como:

$$Vor(p_i) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid dist(x, p_i) < dist(x, p_j), \forall i \neq j\} \quad (1)$$

2.2 Propiedades de las esferas huecas

El concepto de esfera hueca es una idea propuesta para resolver la construcción del diagrama de Voronoi utilizando principalmente la esfera como cuerpo geométrico, debemos de aclarar que las esferas denotan un cuerpo en tres dimensiones, pero las siguientes explicaciones e ilustraciones se tomarán en cuenta en un plano. Por lo que la esfera será acotada a un círculo. El término n -esfera (donde n representa el número de dimensiones) corresponde a una esfera en un espacio euclídeo de cualquier dimensión, donde su centro está ubicado en un punto c y posee un radio r , por lo que:

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid dist(x, c) = r\} \quad (2)$$

Como el grado del diagrama de Voronoi es de tres y está en un espacio con $n = 2$, se establece la cantidad de tres sitios para construir una esfera S , donde $S \in \mathbb{S}^1$ (círculo), siempre que los tres sitios no sean colineales. Estableceremos las siguientes propiedades en que una esfera hueca es una esfera S , que:

- En su interior no contiene ningún sitio de P .
- En su superficie contiene $n + 1$ sitios de P .
- Su centro representa un vértice de Voronoi.
- Llamaremos esfera frontera a aquella esfera que comparte n sitios.

2.3 Algoritmo de construcción

Antes de explicar la metodología que se va a utilizar para construir la estructura del diagrama, vamos a identificar dos casos particulares. El diagrama se irá generando conforme se vayan agregando sitios al plano o espacio, y estos sitios se agregarán de manera secuencial uno por uno. Como primer paso se configuran tres sitios y a partir de ellos se genera una esfera inicial que cuenta con un polígono interno, entonces tenemos:

- Caso 1. a) Cuando un sitio cae dentro de la esfera hueca y dentro del polígono interno, ver figura 2a. b) Cuando un sitio cae dentro de la esfera hueca pero fuera del polígono interno, ver figura 2b.
- Caso 2. Cuando un sitio cae fuera de la esfera hueca, ver figura 2c.

Con la esfera inicial, estableceremos solamente el caso 2a, esto para evitar varios escenarios que dificulten la creación de esferas huecas. Además de que la esfera inicial, con este caso, se crean las aristas que están determinadas por un solo vértice.

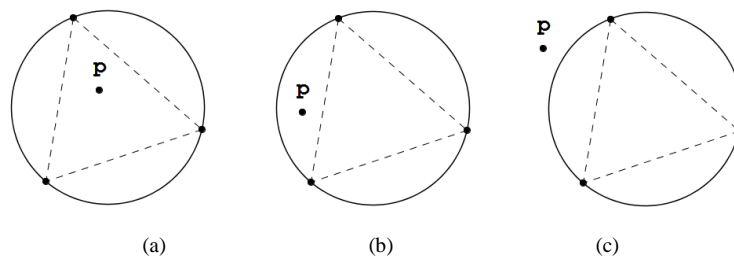


Fig. 2. En esta figura se muestra la clasificación de un nuevo sitio.

Empezamos con un diagrama de Voronoi que se construye con las propiedades de las esferas huecas (figura 3a), como se observa no es necesaria la generación de una triangulación Delaunay pero sí el principio planteado por Deloné [4]. A continuación se agrega un nuevo sitio (llamado Q) a la estructura inicial, lo importante es identificar las esferas en donde cae el nuevo sitio. En el ejemplo, se observa que son tres esferas huecas (ver figura 3b) y se reconocen los sitios que construyen las esferas afectadas (puntos A, C, F, E y D), ver figura 3c.

El procedimiento para detectar si un nuevo punto está dentro de las esferas huecas afectadas es similar al empleado por el algoritmo de Bowyer [5] y Watson [6], pero con la diferencia de que ellos trabajan con la malla triangular y detectan los círculos afectados para reconstruir la triangulación Delaunay. Las esferas seleccionadas se eliminan de la estructura del diagrama y los puntos afectados se ordenan alrededor del nuevo sitio introducido, en la figura 3c se muestran dichos puntos a través de un polígono que encierra el sitio Q, estos puntos concuerdan con los vecinos naturales explicados por Sibson [7]. Después se procede a generar las nuevas esferas huecas con estos puntos, pero de manera ordenada, por ejemplo se traza la primera esfera con los puntos frontera A y C junto con el nuevo punto agregado Q, ver figura 3d. De la misma manera se continúa con los puntos C, F y Q después con F, E y Q y así sucesivamente. Con los

centros de las recién creadas esferas se calcula la nueva región, la cual se muestra sombreada en la figura 3e. Finalmente se reconstruye el diagrama con su nueva región generada por el nuevo sitio, ver figura 3f.

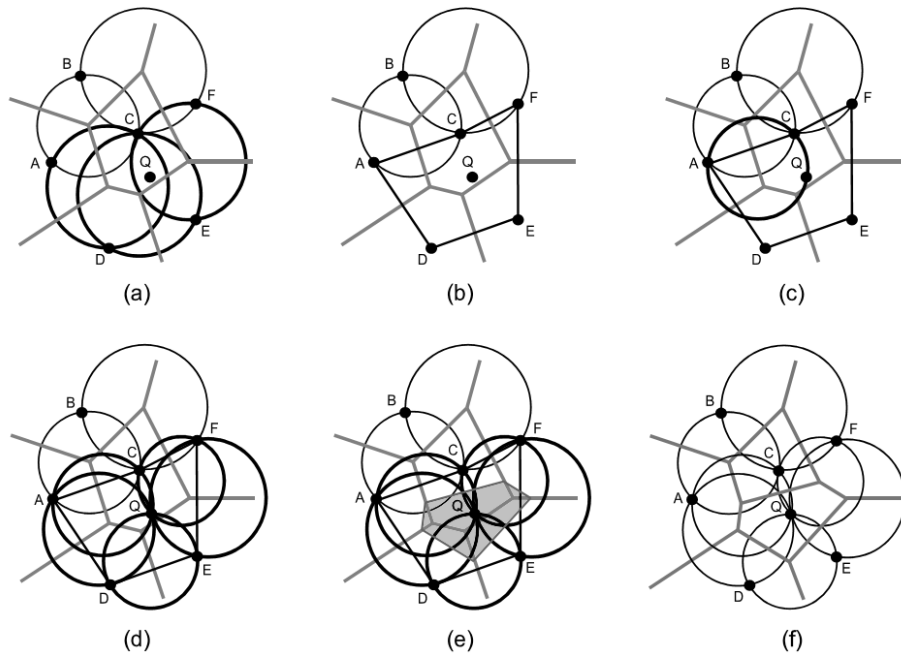


Fig. 3. Metodología para la construcción del diagrama de Voronoi empleando la esfera hueca.

3 Álgebra Geométrica Conforme

El modelo conforme se presenta como una alternativa al espacio euclidiano para resolver problemas geométricos, sin dejar todas las propiedades características del espacio euclidiano. Si deseamos trabajar con objetos geométricos en 3D, tendremos que utilizar un espacio euclidiano en \mathbb{R}^3 , por lo que el espacio conforme requiere de cinco dimensiones. Una razón de este cambio es poder formular los problemas más intuitivamente en un espacio con dos dimensiones de más. El AGC puede utilizar tres vectores euclidianos básicos e_1 , e_2 y e_3 y cuenta con dos adicionales e_0 y e_∞ , donde el primero representa el origen euclidiano y el segundo representa al infinito. Las entidades básicas formadas por el álgebra geométrica se llaman blades (segmentos de subespacios vectoriales), y los 32 blades que se llegan a formar en las cinco dimensiones del AGC se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Lista de los 32 blades que se usan en el AGC.

Grado	Término	Blades	No.
0	scalar	1	1
1	vector	$e_1, e_2, e_3, e_0, e_\infty$	5
2	bivector	$e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3,$ $e_1 \wedge e_\infty, e_2 \wedge e_\infty, e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_0, e_2 \wedge e_0, e_3 \wedge e_0,$ $e_0 \wedge e_\infty$	10
3	trivector	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_0, e_1 \wedge e_2 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_3 \wedge e_0, e_1 \wedge e_3 \wedge e_\infty, e_1 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_2 \wedge e_3 \wedge e_0, e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty, e_2 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	10
4	quadvector	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0,$ $e_1 \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_1 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty,$ $e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	5
5	pseudoscalar	$e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_0 \wedge e_\infty$	1

Una vez que están definidos los elementos en este espacio, el AGC provee una gran variedad de objetos geométricos básicos que tienen dos representaciones la IPNS (Inner Product Null Space) y la OPNS (Outer Product Null Space) (ver referencia [8]), la lista se observa en la tabla 2 y éstas representaciones son duales una de la otra.

Tabla 2. Lista de primitivas geométricas del AGC.

Entidad	Representación IPNS	Representación OPNS
Punto	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Esfera	$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$S^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Plano	$\pi = \mathbf{n} + de_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Círculo	$Z = S_1 \wedge S_2$	$Z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
Línea	$L = \pi_1 \wedge \pi_2$	$L^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Par de Puntos	$Pp = S_1 \wedge S_2 \wedge S_3$	$Pp^* = P_1 \wedge P_2$

Tenemos que \mathbf{x} y \mathbf{n} representan entidades en n dimensiones, por ejemplo \mathbf{x} se obtiene por la siguiente combinación básica de vectores:

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \quad (3)$$

4 AGC para construir el diagrama de Voronoi

4.1 Representación de objetos geométricos en AGC

Un **punto**, para representarlo en el espacio conforme, se toma el punto original $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ el cual tiene que ser extendido a un espacio de $n + 2$ dimensiones, y se denota como:

$$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0 \quad (4)$$

donde \mathbf{x}^2 es la norma cuadrada o el producto escalar de

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \quad (5)$$

Para una **esfera**, en la forma IPNS, se representa con un punto P en el centro de la esfera y el radio r , queda de la siguiente forma:

$$S = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty \quad (6)$$

Si el punto P lo empleamos como la ecuación 4, tenemos:

$$S = \mathbf{x} + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^2 - r^2)e_\infty + e_0 \quad (7)$$

4.2 Operaciones necesarias del AGC para construir el diagrama de Voronoi

En la explicación de la metodología de los diagramas de Voronoi, las esferas huecas fueron presentadas como círculos, esto debido al ejemplo de trabajar en un espacio de dos dimensiones. Sin embargo el término esfera sigue quedando en pie para trabajar en dimensiones iguales o mayores a dos. A continuación mencionaremos las principales operaciones necesarias para construir los diagramas de Voronoi y los ejemplos serán para un espacio de 3D. Se explicarán brevemente algunos conceptos matemáticos, dejando solamente las operaciones que son necesarias, para una mayor referencia a esta herramienta matemática se pueden checar las referencias [9] [10].

Distancia entre dos puntos

Esta es una operación básica e indispensable para muchos de los cálculos que se realizan en la metodología propuesta, principalmente para encontrar distancias entre los puntos y determinar cuáles son los puntos que van a pertenecer a una esfera. Tomaremos dos puntos P y Q y efectuando el producto punto entre los vectores es:

$$P \cdot Q = \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 e_\infty + e_0\right) \cdot \left(\mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{q}^2 e_\infty + e_0\right) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 - \frac{1}{2}\mathbf{q}^2$$

Si \mathbf{p} y \mathbf{q} tienen la forma de la ecuación 3, y tomamos los tres vectores básicos, tenemos:

$$P \cdot Q = -\frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 \quad (8)$$

El resultado del producto punto de dos puntos (ecuación 8) multiplicado por -2, se identifica con el cuadrado de la distancia Euclidiana.

$$-2(P \cdot Q) = (\mathbf{p} - \mathbf{q})^2 \quad (9)$$

Ajuste de una esfera a través de puntos

En la metodología es importante identificar a las esferas huecas, conforme se inserten los puntos en el espacio, por lo que es necesario calcular el centro y radio como característica de cada esfera. Por ejemplo en la figura 4 se aprecia una esfera compuesta por cuatro puntos. Necesitamos de cuatro puntos para obtener las características de una esfera, sean esos cuatro puntos $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^3$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ y representaremos a un punto como la ecuación 4 y a una esfera como la ecuación 6. El producto interno nos provee una medida de distancia, y buscaremos un ajuste de mínimos cuadrados de:

$$\sum_{i=1}^4 [\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{S}]^2 = \sum_{i=1}^4 \left[\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{s} - \frac{1}{2} \mathbf{p}_i^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{s}^2 - r^2) \right]^2 \quad (10)$$

Para desear el mínimo de la ecuación 10, se deriva con respecto a los componentes s_1, s_2, s_3 , y s_4 (donde $s_4 = (\mathbf{s}^2 - r^2)/2$) e igualando a cero, nos proporciona un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, cuyo sistema es:

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^4 p_{i,1}p_{i,1} & \sum_{i=1}^4 p_{i,2}p_{i,1} & \sum_{i=1}^4 p_{i,3}p_{i,1} & -\sum_{i=1}^4 p_{i,1} \\ \sum_{i=1}^4 p_{i,1}p_{i,2} & \sum_{i=1}^4 p_{i,2}p_{i,2} & \sum_{i=1}^4 p_{i,3}p_{i,2} & -\sum_{i=1}^4 p_{i,2} \\ \sum_{i=1}^4 p_{i,1}p_{i,3} & \sum_{i=1}^4 p_{i,2}p_{i,3} & \sum_{i=1}^4 p_{i,3}p_{i,3} & -\sum_{i=1}^4 p_{i,3} \\ -\sum_{i=1}^4 p_{i,1} & -\sum_{i=1}^4 p_{i,2} & -\sum_{i=1}^4 p_{i,3} & \sum_{i=1}^4 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{s} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i^2 p_{i,1} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i^2 p_{i,2} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i^2 p_{i,3} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \mathbf{p}_i^2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

El centro de la esfera corresponde a los valores de s_1, s_2 y s_3 , mientras que el radio se determina de la siguiente forma:

$$r^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 - 2s_4 \quad (12)$$



Fig. 4. Con cuatro puntos podemos construir una esfera

En el caso de que sólo queramos construir círculos, como el ejemplo mostrado anteriormente en dos dimensiones, solamente quitamos un punto y con tres puntos se calcula el centro y radio de un círculo. Se modifica la ecuación 11 para trabajar con tres puntos. A continuación se muestra un segmento de código en lenguaje de programación java que resuelve el ajuste de un círculo con tres puntos.

```
// Matriz que contiene los tres puntos
double pts[][] = {{p1.getXplano(), p1.getYplano()},
                  {p2.getXplano(), p2.getYplano()}, {p3.getXplano(), p3.getYplano()}};
// Iteración que calcula las sumatorias
for(int i = 0; i < 3; i++) {
    a[0][0] += pts[i][0] * pts[i][0];
    a[0][1] += pts[i][0] * pts[i][1];
    a[0][2] += -pts[i][0];
    a[1][0] += pts[i][0] * pts[i][1];
    a[1][1] += pts[i][1] * pts[i][1];
    a[1][2] += -pts[i][1];
    a[2][0] += -pts[i][0];
    a[2][1] += -pts[i][1];
    a[2][2] += 1
}
```



```

d = Math.pow(pts[i][0],2) + Math.pow(pts[i][1],2);
b[0] += 0.5 * d * pts[i][0];
b[0] += 0.5 * d * pts[i][1];
b[0] += 0.5 * d; }
// Método que resuelve un Sistema de Ecuaciones Lineales
resuelveSEL(a, b, x, 3);
// Se obtiene el centro del círculo
xcent = x[0];
ycent = x[1];
// Se obtiene el radio del círculo
radio = Math.sqrt(x[0] * x[0] + x[1] * x[1] - 2 * x[2]);

```

Determinar si un punto está dentro de una esfera

Un punto importante, es identificar en cuáles esferas huecas tiene contenido el nuevo punto que ha sido insertado para generar una nueva región de Voronoi. En el AGC usaremos el producto punto entre un punto y una esfera para determinar si está dentro, en o fuera de la esfera. Sea un punto P y sea S una esfera, el producto punto de estos dos cuerpos geométricos es:

$$P \cdot S = \left(\mathbf{p} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^2 e_\infty + e_0 \right) \cdot \left(\mathbf{s} + \frac{1}{2} (\mathbf{s}^2 - r^2) e_\infty + e_0 \right)$$

$$P \cdot S = -\frac{1}{2} (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 + \frac{1}{2} r^2 \quad (13)$$

El resultado del producto punto de un punto con una esfera (ecuación 13) multiplicado por -2, se identifica con la potencia de un punto.

$$-2(P \cdot Q) = (\mathbf{s} - \mathbf{p})^2 - r^2 \quad (14)$$

De la ecuación 13 identificamos mediante las siguientes relaciones, la ubicación del punto con respecto a la esfera y en la figura 5 se observan los tres casos.

- Si $P \cdot S > 0$, P está dentro de la esfera, ver figura 5a.
- Si $P \cdot S = 0$, P está sobre de la esfera, ver figura 5b.
- Si $P \cdot S < 0$, P está fuera de la esfera, ver figura 5c.

En seguida se muestra un segmento de código en java para determinar si un punto cae dentro de un círculo o no.

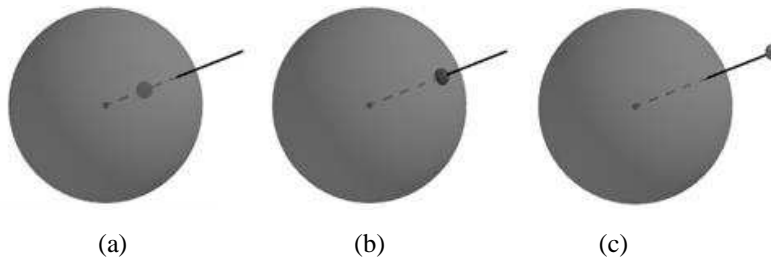


Fig. 5. La operación nos ayuda a determinar si el punto está dentro, sobre o fuera de la esfera.

```
// Se realiza el producto punto de P y S
double ps = Math.pow(s.getRadio(),2) -
    ( Math.pow(c.getXplano(),2) + Math.pow(c.getYplano(),2) -
      2 * (s.getXcent() * p.getXplano() + s.getYcent() * p.getYplano()) +
      Math.pow(s.getXplano(),2) + Math.pow(s.getYplano(),2) );
// Se identifica la condición del producto punto
if( ps > 0 ) return 1;      // P está dentro del círculo
if( ps == 0 ) return 0;    // P está sobre el círculo
if( ps < 0 ) return -1;    // P está fuera del círculo
```

4.3 Implementación realizada y ventajas del AGC

Se ha desarrollado un programa que resuelve la metodología de las esferas huecas empleando las características del espacio euclidiano. Se utilizó el lenguaje de programación Java con bibliotecas gráficas de JOGL. Se probaron módulos que utilizan los conceptos del AGC, como los segmentos de código mostrados anteriormente, y los resultados fueron los mismos para la generación de las regiones de Voronoi. En la figura 6 se muestra un resultado de la aplicación gráfica del programa.

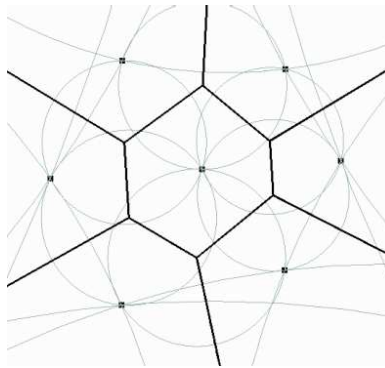


Fig. 6. Resultado de la interfaz gráfica del programa

Algunas de las características que benefician al AGC son:

- Unificación de diversos sistemas matemáticos, además de que se preservan ángulos y distancias.
- Manejo intuitivo y simple para manejar objetos geométricos, como puntos, líneas, planos, círculos y esferas.
- Manejo intuitivo de las operaciones entre los cuerpos geométricos.

5 Conclusiones y trabajo futuro

Este trabajo es una contribución fundamental donde se replantean las técnicas que existen para construir los diagramas de Voronoi, de tal manera que sea posible asociar cuerpos geométricos sencillos y poderosos. Dichos cuerpos geométricos formarán la estructura principal para crear las regiones de Voronoi en forma incremental. El AGC nos

proporciona un mundo en el cual los puntos y esferas se representan como vectores, además de operaciones entre ellos que facilitan sus aplicaciones y de esta forma se puede trabajar con una matemática uniforme y coherente que de salida a una representación gráfica.

Como trabajo a futuro, se necesita implementar totalmente las matemáticas del AGC para realizar todos los cálculos de las esferas huecas que nos permitan construir el diagrama de Voronoi. Como se mencionaba, se acoplaron módulos que resuelven aplicaciones específicas utilizando AGC, todo esto en una aplicación gráfica bajo el lenguaje de programación Java. También, se puede pensar en paralelizar los cálculos de las propiedades de las esferas huecas para obtener ventaja en los tiempos de procesamiento.

Agradecimientos

Para la elaboración de este trabajo se agradece el apoyo otorgando por Instituto Politécnico Nacional, a través del proyecto SIP20141047 y al programa BEIFI.

Referencias

1. Du, Q., Faber V. and Gunzburger, M.: Centroidal Voronoi Tessellations: Applications and Algorithms, SIAM Review, vol. 41, no. 4, 637-676 (1999)
2. Hestenes, D., and Garret E.: Clifford Algebra to Geometric Calculus. Kluwer: Springer Verlag (1984)
3. Bayro, E.: Handbook of Geometric Computing. Applications in Pattern Recognition, Computer Vision, Neurocomputing and Robotics, Springer (2005)
4. Deloné, B. N.: Sur la sphere vide, Bulletin of the Academy of Sciences of the U.S.S.R., no. 6, 793-800 (1934)
5. Bowyer, A.: Computing dirichlet tessalations, The Computer Journal, vol. 24, no. 2, 162-166 (1981)
6. Watson. D. Computing the n-dimensional delaunay tessalation with application to voronoi polytopes, The Computer Journal, vol. 24, no. 2, 167-172 (1981)
7. Green, P. J., Sibson, R. R.: Computing Dirichlet tessellations in the plane. Comput. J., 21:168–173 (1978)
8. Hitzer, E.: Euclidean Geometric Objects in the Clifford Geometric Algebra of Origin, 3-Space, Infinity Bulletin of the Belgian Mathematical Society. (2004)
9. Hilderbrand, D.: Foundations of Geometric Algebra Computing, Springer (2013)
10. Vince, J.: Geometric Algebra for Computing Graphics, Springer (2008)